E.N.S.I. DE CHIMIE groupe Centre 1983

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE PARTIE

DURÉE : 2 heures

Options P' et TB

PREMIÈRE QUESTION

Soit k un nombre réel strictement compris entre 0 et 1. On considère la fonction $f_k(\varphi)$ de la variable réelle φ définie par

$$f_k(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

1° Montrer que $f_k(\varphi)$ est définie pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, impaire, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que

$$\lim_{\varphi \to +\infty} f_k(\varphi) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\varphi \to -\infty} f_k(\varphi) = -\infty$$

En déduire que f_k admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2° Soit am_k cette fonction réciproque, telle donc que $u = f_k(\varphi)$ soit équivalent à $\varphi = am_k\, u$. On notera désormais $f_k(\varphi) = am_k^{-1}\, \varphi$. On pose $\omega_k = 2\, am_k^{-1}(\pi/2)$.

Montrer que am_k est une fonction impaire, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et que l'on a

$$am_k\,(u + \omega_k) = am_k\, u + \pi .$$

3° On pose $dn_k\, u = (am_k\, u)'$, dérivée de $am_k\, u$, et $cn_k\, u = \cos(am_k\, u)$, $sn_k\, u = \sin(am_k\, u)$. Montrer que :

a. dn_k est paire, périodique de plus petite période ω_k.

b. cn_k est paire, périodique de plus petite période $2\,\omega_k$.

c. sn_k est impaire, périodique de plus petite période $2\,\omega_k$.

d. On a les identités $cn_k^2\, u + sn_k^2\, u = 1$ et $dn_k^2\, u + k^2 sn_k^2\, u = 1$.

4° Montrer que les dérivées des fonctions cn_k, sn_k et dn_k sont respectivement

$$cn_k'\, u = -\, sn_k\, u . dn_k\, u, \qquad sn_k'\, u = cn_k\, u . dn_k\, u \quad \text{et} \quad dn_k'\, u = -\, k^2 sn_k\, u . cn_k\, u.$$

Étudier les variations et tracer le graphe de $dn_k\, u$ pour u variant dans l'intervalle $\left[0, \frac{\omega_k}{2}\right]$. On ne cherchera pas à localiser le point d'inflexion.

5° Montrer que la restriction de sn_k à l'intervalle $\left[-\frac{\omega_k}{2}, +\frac{\omega_k}{2}\right]$ est une bijection entre cet intervalle et l'intervalle $[-1, +1]$. On notera sn_k^{-1} la bijection réciproque.

De même, on pose $sd_k\, u = sn_k\, u / dn_k\, u$. Montrer que la restriction de sd_k à l'intervalle $\left[-\frac{\omega_k}{2}, +\frac{\omega_k}{2}\right]$ est une bijection entre cet intervalle et l'intervalle $[-1/\sqrt{1-k^2}, +1/\sqrt{1-k^2}]$. On notera sd_k^{-1} la bijection réciproque.

Calculer les dérivées des fonctions $sn_k^{-1} t$ et $sd_k^{-1} t$.

.../...

DEUXIÈME QUESTION

Soit $P(x)$ un polynôme du 3e degré à coefficients réels, n'ayant que des racines simples (éventuellement complexes) et dont le coefficient du terme en x^3 vaut 1. Soit r la plus grande racine réelle de $P(x)$, ou la racine réelle de $P(x)$ s'il n'en admet qu'une. On peut donc écrire :

$$P(x) = (x - r)\ Q(x) \qquad \text{avec} \qquad Q(x) = x^2 - 2sx + p$$

où s et p sont deux nombres réels.

On se propose de déterminer les primitives de $\dfrac{1}{\sqrt{P(x)}}$ sur tout intervalle où $P(x) > 0$.

1° Montrer qu'il existe deux couples (λ_0, x_0) et (λ_1, x_1) de nombres réels, avec $\lambda_0 \neq \lambda_1$, tels que $Q(x) + \lambda_0(x - r) = (x - x_0)^2$ et $Q(x) + \lambda_1(x - r) = (x - x_1)^2$. On supposera dorénavant que $\lambda_0 < \lambda_1$.

En déduire que l'on peut écrire

$$P(x) = [(x - x_1)^2 - (x - x_0)^2] \cdot [\alpha(x - x_1)^2 + \beta(x - x_0)^2]$$

où α et β sont des nombres réels que l'on déterminera en fonction de λ_0 et λ_1.

2° On suppose que $P(x)$ a trois racines réelles distinctes.

Montrer que l'on a alors $\lambda_0 < \lambda_1 < 0$ et que l'on peut écrire

$$P(x) = B^2[(x - x_1)^2 - (x - x_0)^2] \cdot [(x - x_1)^2 - k^2(x - x_0)^2]$$

où B et k sont deux nombres réels strictement positifs, avec de plus $k < 1$, que l'on déterminera en fonction de λ_0 et λ_1.

Montrer que les primitives de $\dfrac{1}{\sqrt{P(x)}}$ sur tout intervalle où $P(x) > 0$ sont les fonctions

$$\frac{1}{(x_0 - x_1).B}\, sn_k^{-1}\left(\frac{x - x_0}{x - x_1}\right) + C$$

où C est une constante arbitraire.

3° On suppose que $P(x)$ n'admet que r comme racine réelle.

Montrer que l'on a alors $\lambda_0 < 0 < \lambda_1$ et que l'on peut écrire

$$P(x) = B^2[(x - x_1)^2 - (x - x_0)^2] \cdot [(x - x_1)^2 + h^2(x - x_0)^2]$$

où B et h sont deux nombres réels strictement positifs que l'on déterminera en fonction de λ_0 et λ_1.

Montrer que les primitives de $\dfrac{1}{\sqrt{P(x)}}$ sur tout intervalle où $P(x) > 0$ sont les fonctions

$$\frac{k'}{(x_0 - x_1).B}\, sd_k^{-1}\left(\frac{1}{k'} \cdot \frac{x - x_0}{x - x_1}\right) + C$$

où $k' = \dfrac{1}{\sqrt{h^2 + 1}}$ et $k = \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + 1}}$, et où C est une constante arbitraire.

4° *Application* : calculer $I = \dfrac{1}{\omega_{1/2}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x\left(x + \frac{1}{3}\right)(x + 3)}}$.

FIN